Filtri Numerici

Corso di “Digital Signal Processors” (DSP)
ERICSSON – Roma 2008 – 08/09/10 Aprile

Simone Bianchi, *TangerineTech Engineering*

Richiami matematici

RICHIAMI MATEMATICI

Trasformata di Laplace

TRASFORMATA DI LAPLACE

TRASFORMATA DI LAPLACE

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f\right\}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

La trasformata di Laplace è una funzione lineare che permette di passare dallo studio di una variabile reale allo studio di una variabile complessa.

TRASFORMATA DI LAPLACE

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f\right\}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

Questa trasformata integrale è utile per l'analisi dei sistemi dinamici lineari. Il vantaggio più significativo è che l'integrale / derivata diventano una moltiplicazione / divisione rispettivamente. Essa trasforma le equazioni integrali e le equazioni differenziali in equazioni polinomiali, che sono molto più facili da risolvere.

TRASFORMATA DI LAPLACE

$$\mathcal{L}\left\{af(t)+bg(t)\right\}=a\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}+b\mathcal{L}\left\{g(t)\right\}$$

La trasformata di Laplace è una funzione lineare.

TRASFORMATA DI LAPLACE

$$\mathcal{L}\{f'\} = s\mathcal{L}\{f\} - f(0+)$$

La trasformata di Laplace della derivata di una funzione è uguale alla variabile complessa s moltiplicata per la trasformata di detta funzione meno il valore assunto dalla funzione stessa all'istante iniziale.

TRASFORMATA DI LAPLACE

$$\boxed{C \Leftrightarrow 1/Cs}$$

$$\boxed{R \Leftrightarrow R}$$

$$\boxed{L \Leftrightarrow Ls}$$

Per risolvere le equazioni dei circuiti elettrici nel dominio del tempo bisogna utilizzare delle equazioni integrodifferenziali. Facendo uso della trasformata di Laplace esse diventano semplici equazioni polinomiali nella variabile s.

s-> variabile complessa della trasf. di Laplace.

Trasformata Z

TRASFORMATA Z

TRASFORMATA Z

$$X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

La trasformata Z converte un segnale tempo-discreto (vale a dire una sequenza di numeri reali o complessi) in una rappresentazione complessa nel dominio della variabile z. Può essere considerata un analogo nei sistemi numerici della trasformata di Laplace.

TRASFORMATA Z

$$x[n-k] \quad \Leftrightarrow \quad z^{-k} X(z)$$

La trasformata Z di un segnale x(n) ritardato di k campioni è uguale alla trasformata del segnale non traslato moltiplicata per z^(-k).

TRASFORMATA Z

$$y(n)=b_0(x(n)+b_1 x(n-1))-a_0 y(n-1)$$

$$Y(z)=b_0(X(z)+X(z)b_1 z^{-1})-a_0 Y(z)z^{-1}$$

La trasformata Z permette di passare da una equazione alle differenze (descrizione del comportamento nel tempo del sistema discreto) ad una espressione in trasformata z basata sulle trasformate di ingressi ed uscite e sul fattore di ritardo z^(-k). Questo è utile nel progetto dei filtri digitali.

Trasformata di Fourier

TRASFORMATA DI FOURIER

TRASFORMATA DI FOURIER

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt$$

1. **Trasformata di Fourier Continua**

Essa permette di ottenere, a partire da una funzione di variabile reale, una funzione complessa. Quando la variabile reale è t (tempo) la variabile complessa f rappresenta la frequenza. Quindi la trasformata di Fourier permette la trasformazione della risposta nel tempo di un sistema nella sua risposta nel dominio della frequenza.

TRASFORMATA DI FOURIER

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-i2\pi ft} dt$$

Il modulo della funzione complessa S(f) rappresenterà la 'risposta in ampiezza' del sistema, mentre l'argomento della stessa funzione rappresenterà la 'risposta in fase' del sistema medesimo.

TRASFORMATA DI FOURIER

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arg(z) = \operatorname{atan2}(y, x)$$

Per un numero complesso x+iy le formule sopra riportate ne definiscono modulo e argomento. La funzione atan2(y,x) è uguale ad atan (y/x)

TRASFORMATA DI FOURIER

$$S(f) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-i2\pi f t} dt$$

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{f\right\}(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-st} f(t)\, dt.$$

La trasformata di Fourier (sopra) può essere vista come caso particolare della trasformata di Laplace (sotto) ponendo s = i ω, cioè s= i2Πf. Ciò è valido solo in determinate condizioni di convergenza. Ne consegue comunque una forte somiglianza nelle proprietà delle due trasformate.

TRASFORMATA DI FOURIER

$$S_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] \cdot e^{-i2\pi fnT} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] \cdot e^{-i2\pi \frac{f}{f_s} n},$$

2.**Trasformata di Fourier Discreta**

Campionando una funzione continua s(t) e producendone una sequenza s(nT), con valori interi di n, se ne può calcolare la trasformata di Fourier. L'integrale del paragrafo precedente si riduce dunque alla sommatoria illustrata.

TRASFORMATA DI FOURIER

$$S_T(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] \cdot e^{-i2\pi f n T} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] \cdot e^{-i2\pi \frac{f}{f_s} n},$$

La DFT è una funzione periodica, con periodo 1/T dove T rappresenta il tempo di campionamento. Anche essa ci permette di trasformare la risposta nel tempo di un sistema discreto nella sua risposta nel dominio della frequenza. Costituisce l'analogo della trasformata continua per i sistemi numerici o digitali.

TRASFORMATA DI FOURIER

$$h(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s_H(f)\, e^{\frac{i2\Pi kn}{N}}$$

La IDFT (trasformata discreta inversa di Fourier) è la funzione inversa della trasformata discreta di Fourier. Essa ci permette di trasformare la risposta nel dominio della frequenza di un sistema discreto nella sua risposta nel tempo. N rappresenta il numero di campioni della risposta nel dominio della frequenza e k varia tra 0 e N-1.

TRASFORMATA DI FOURIER

$$h(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s_H(f)\, e^{\frac{i2\Pi kn}{N}}$$

La IDFT può permetterci ad esempio, conoscendo la risposta in frequenza di un sistema che vogliamo emulare, di costruirne la risposta nel tempo, utile per definirne un filtro digitale appropriato.

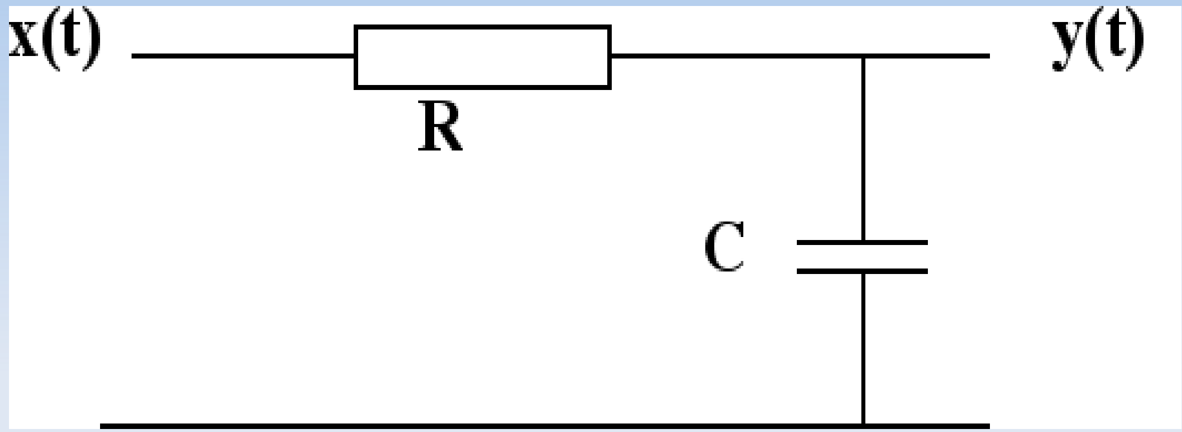
Calcolo di Filtri Numerici

CALCOLO DI FILTRI NUMERICI

Filtri IIR

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

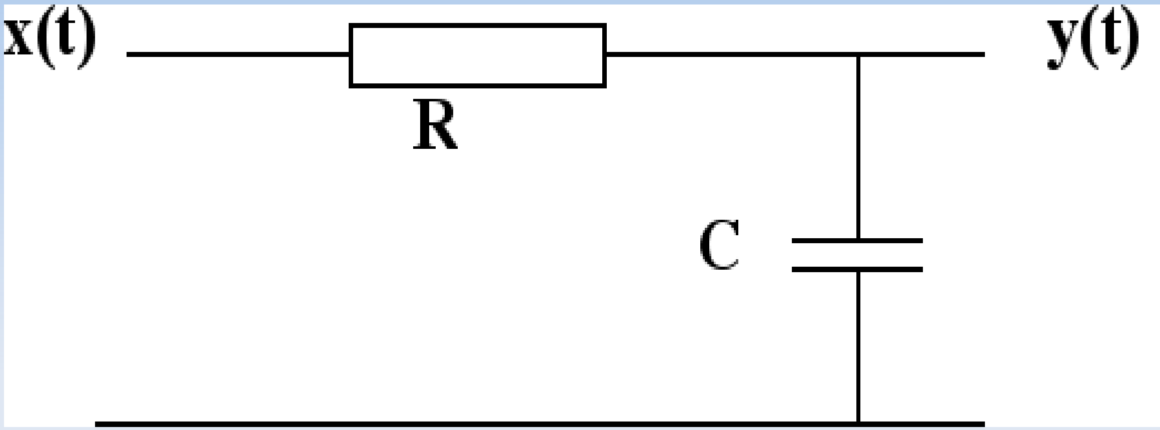
CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE



1. **Trasformata di Laplace del filtro analogico**

A partire dal filtro in figura si vuole ottenere un filtro numerico equivalente. Useremo il metodo della trasformazione bilineare.

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE



Per iniziare si ottiene la risposta H(s) del filtro analogico con la trasformata di Laplace. Operativamente il metodo consiste nell'effettuare alcune sostituzioni riguardanti i componenti del filtro stesso.

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$\boxed{C \Leftrightarrow 1/Cs}$$

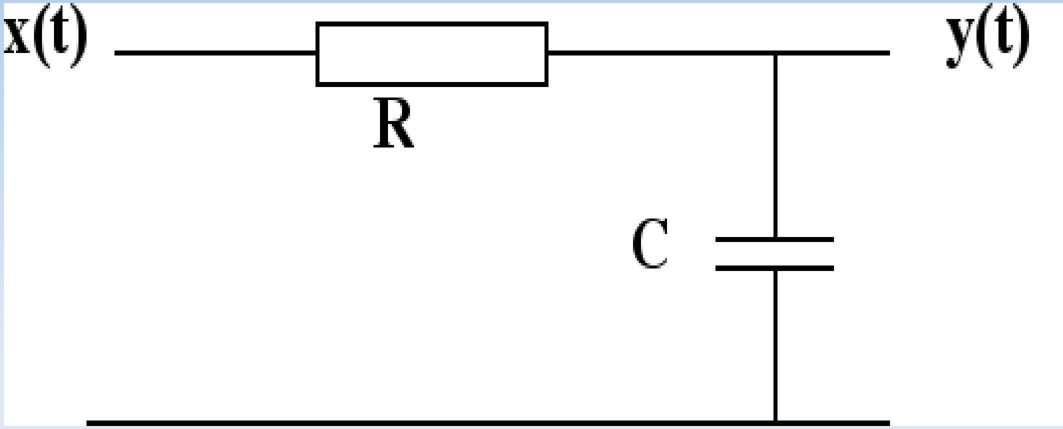
$$\boxed{R \Leftrightarrow R}$$

$$\boxed{L \Leftrightarrow Ls}$$

1/Cs -> sostituzione del condensatore
Ls -> sostituzione dell'induttanza
R -> sostituzione della resistenza

s-> variabile complessa della trasf. di Laplace.

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE



Effettuate le sostituzioni si procede al calcolo della tensione di uscita del partitore secondo i classici metodi dell'elettrotecnica (leggi di Ohm generalizzate).

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$Y(s) = X(s)\frac{(1/Cs)}{(R+1/Cs)}$$

Effettuiamo ora il semplice sviluppo algebrico dell'equazione, portando a denominatore comune.

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1/Cs}{R+1/Cs} = \frac{1/Cs}{RCs/Cs+1/Cs}$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{RCs+1}$$

Semplificando i termini si ottiene la semplice espressione della funzione di trasferimento del quadripolo in esame.

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$$

2. **Trasformazione bilineare**

Per trasformare la funzione di trasferimento H(s) del filtro analogico nella funzione di trasferimento H(z) del filtro numerico si utilizza l'equivalenza sopra riportata.

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}$$

Essa è detta **trasformazione bilineare**. Il suo impiego ci consente di ottenere la funzione nel dominio della variabile z (trasformata z) che ci risulterà necessaria per ricavare i coefficienti del filtro numerico.

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$H(z)=\frac{1}{\frac{2RC}{T}\frac{z-1}{z+1}+1}$$

Applicando la trasformazione bilineare si ottiene la risposta in trasformata z del filtro numerico equivalente. Effettuiamo ora i necessari passaggi algebrici.

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$H(z)=\frac{1}{\frac{2RC}{T}\frac{z-1}{z+1}+\frac{z+1}{z+1}}$$

$$H(z)=\frac{z+1}{\frac{2RC}{T}(z-1)+z+1}$$

Ecco una più semplice espressione di H(z). Disponiamo ora il numeratore ed il denominatore come espressioni in potenza decrescente di z:

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$H(z)=\frac{z+1}{\frac{2RC}{T}z-\frac{2RC}{T}+z+1}$$

$$H(z)=\frac{z+1}{(1+\frac{2RC}{T})z+(1-\frac{2RC}{T})}$$

Si dividono ora per la massima potenza presente di z sia il numeratore che il denominatore:

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{(1+\frac{2\mathrm{RC}}{T})+(1-\frac{2\mathrm{RC}}{T})z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{(\frac{T+2\mathrm{RC}}{T})+(\frac{T-2\mathrm{RC}}{T})z^{-1}}$$

Disponiamo ora l'espressione di H(z) in modo che il termine di grado maggiore sia 1 sia al denominatore che al numeratore:

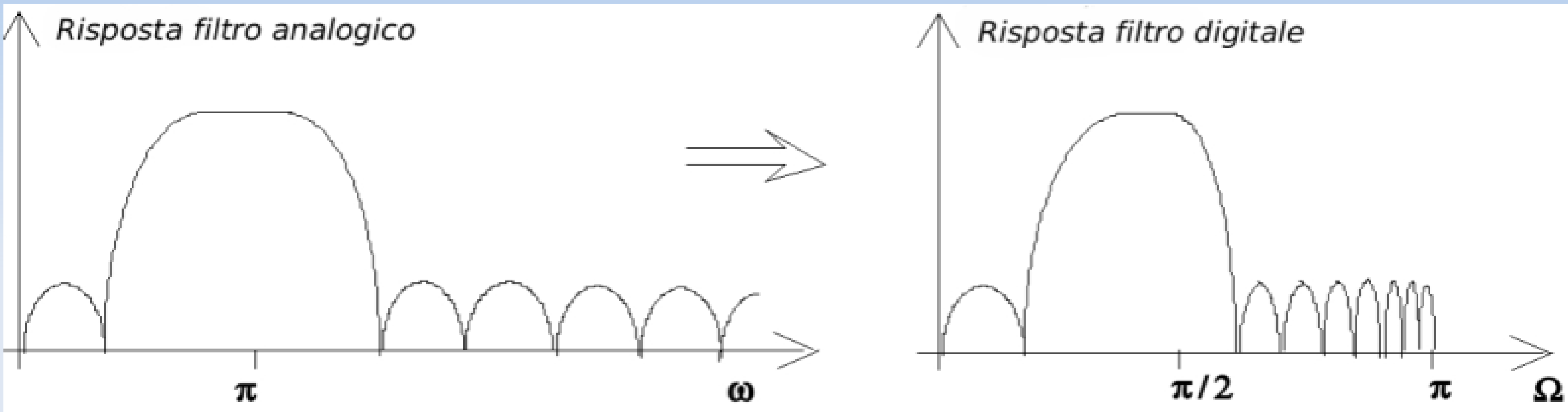
CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$H(z)=\frac{T}{2\mathrm{RC}+T}\frac{1+z^{-1}}{1+\frac{T}{2\mathrm{RC}+T}\frac{T-2\mathrm{RC}}{T}z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{T}{2\mathrm{RC}+T}\frac{1+z^{-1}}{1+\frac{T-2\mathrm{RC}}{T+2\mathrm{RC}}z^{-1}}$$

Questa è l'espressione che si ottiene semplificando i fattori ridondanti. Abbiamo ottenuto la funzione di trasferimento del filtro numerico in funzione dei valori dei componenti R e C presenti nel circuito analogico.

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE



3. **Pre-Warping**

La trasformazione bilineare altera la risposta in frequenza del filtro analogico comprimendola verso l'origine come mostrato dalla figura.

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$w_{analog} = \frac{2}{T} \tan \frac{w_{target} T}{2}$$

Per avere il rispetto delle frequenze fondamentali del filtro originale (nel nostro caso della frequenza di taglio del filtro passa-basso) la operazione di **pre-warping** descritta dall'equazione deve essere eseguita.

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$w_{analog} = \frac{2}{T} \tan \frac{w_{target} T}{2}$$

Vale a dire che i valori dei componenti R e C del filtro analogico di partenza dovranno essere alterati in base alla equazione sopra riportata.

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$w_{analog} = \frac{2}{T} \tan \frac{w_{target} T}{2}$$

In questo modo la successiva distorsione della risposta in frequenza operata dalla trasformazione bilineare riporterà la frequenza di taglio del filtro al valore desiderato in partenza (target).

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$f = \frac{1}{2 \Pi RC}$$

$$w = 2 \Pi f$$

$$T = \frac{1}{f_{sampling}}$$

La prima equazione esprime la frequenza di taglio del filtro in esame, la seconda la relazione generale fra la velocità angolare e la frequenza, la terza la relazione fra T e frequenza di campionamento del sistema numerico.

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$w_{prewarped} = \frac{2}{T} \tan \frac{w_{target} T}{2}$$

$$2 \Pi f_{prewarped} = \frac{2}{T} \tan \frac{2 \Pi f_{target} T}{2}$$

La seconda equazione discende dalla prima utilizzando la w=2PI*f. Ora semplifichiamo e utilizziamo la relazione f=1/(2*PI*RC)

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$f_{prewarped} = \frac{1}{\Pi T} \tan(\Pi f_{target} T)$$

$$\frac{1}{2 \Pi R_{prewarped} C_{prewarped}} = \frac{1}{\Pi T} \tan \frac{\Pi T}{2 \Pi \; R_{target} C_{target}}$$

Esprimiamo R e C prewarped in funzione di R e C target:

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$2R_{prewarped}C_{prewarped}=\frac{T}{\tan\left(\frac{T}{2R_{target}C_{target}}\right)}$$

$$R_{prewarped}C_{prewarped}=\frac{T/2}{\tan\left(\frac{T}{2R_{target}C_{target}}\right)}$$

Abbiamo così espresso R e C prewarped in funzione di R e C target.

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$H(z)=\frac{T}{2\mathrm{RC}+T}\frac{1+z^{-1}}{1+\frac{T-2\mathrm{RC}}{T+2\mathrm{RC}}z^{-1}}$$

4. **Applicazione Pre-Warping**

Applichiamo ora le risultanze del paragrafo precedente alla funzione di trasferimento del filtro numerico sopra riportata.

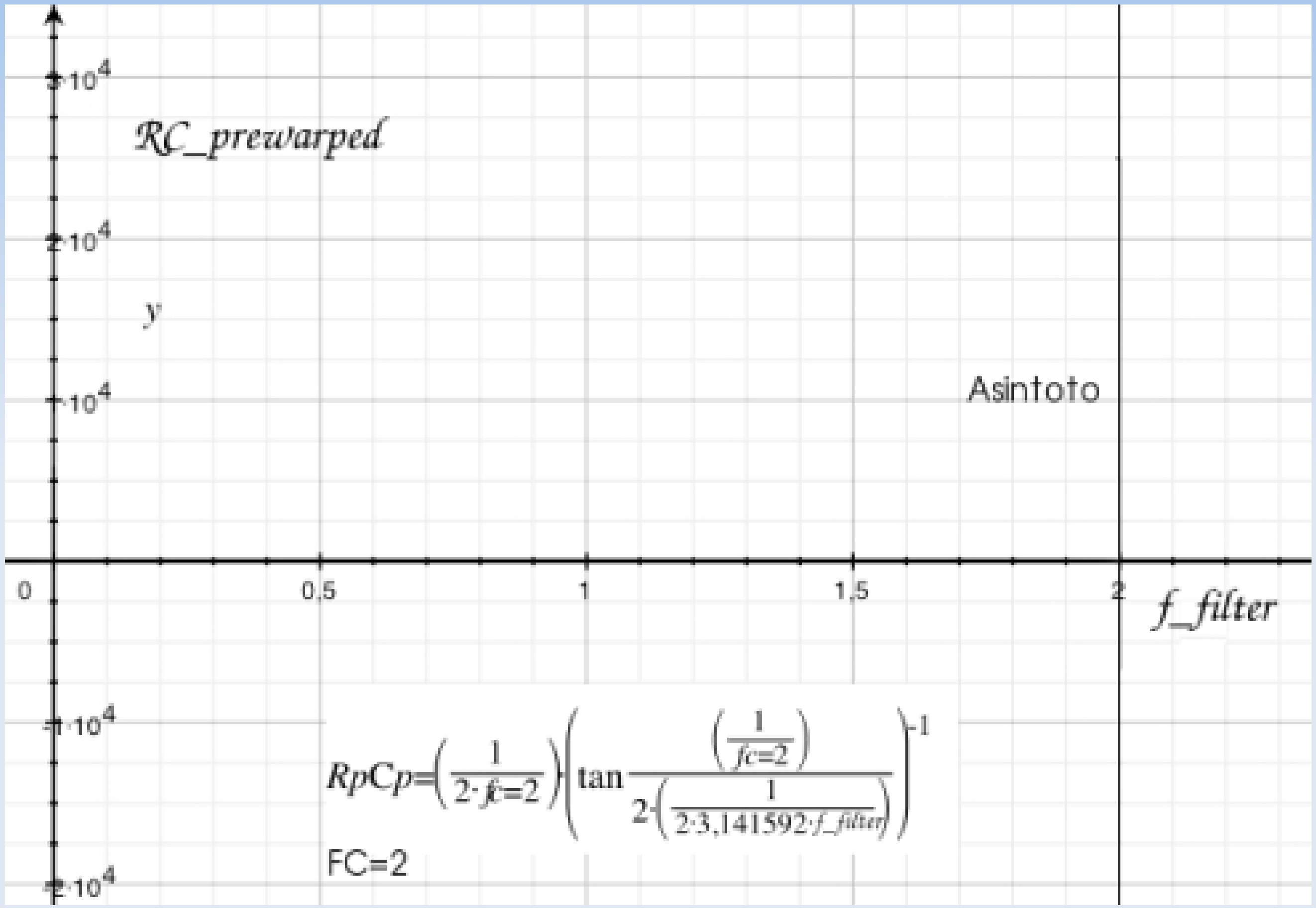
CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$H(z)=\frac{T}{2\mathrm{R}_{prewarped}C_{prewarped}+T}\frac{1+z^{-1}}{1+\frac{T-2\mathrm{R}_{prewarped}C_{prewarped}}{T+2\mathrm{R}_{prewarped}C_{prewarped}}z^{-1}}$$

Si tenga presente che, come ottenuto più sopra:

$$R_{prewarped}C_{prewarped}=\frac{T/2}{\tan\left(\frac{T}{2R_{target}C_{target}}\right)}$$

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE



Cosa succede se la frequenza di taglio del filtro è pari alla frequenza di Nyquist?

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$H(z)=b_0\frac{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+\ldots}{1+a_0 z^{-1}+a_1 z^{-2}+\ldots}$$

5. **Equazione alle differenze e struttura del filtro**

La funzione di trasferimento del filtro numerico generico si può esprimere come dall'equazione sopra.

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$H(z)=b_0\frac{1+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}+\dots}{1+a_0 z^{-1}+a_1 z^{-2}+\dots}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=b_0\frac{1+b_1 z^{-1}}{1+a_0 z^{-1}}$$

Ci siamo ora limitati al primo ordine (in questo caso, dal momento che il filtro da simulare è del primo ordine). Otteniamo nel seguito l'uscita del filtro numerico in funzione degli altri termini, cioè Y(z)=(...).

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$Y(z)(1+a_0 z^{-1})=b_0(1+b_1 z^{-1})X(z)$$

$$Y(z)+Y(z)a_0 z^{-1}=b_0(X(z)+X(z)b_1 z^{-1})$$

Ora raccogliamo i fattori e riordiniamo:

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$Y(z)=b_0(X(z)+X(z)b_1 z^{-1})-a_0 Y(z) z^{-1}$$

$$y(n)=b_0(x(n)+b_1 x(n-1))-a_0 y(n-1)$$

La seconda equazione (equazione alle differenze) deriva dalla prima sostituendo l'esponenziale di z^(-x) con il ritardo di x campioni. Questo ci dà in modo molto semplice la risposta nel tempo del filtro numerico e la sua struttura. Anche questo risultato sarà ripreso nel seguito.

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$H(z)=\frac{T}{2\mathrm{R}_{prewarped}C_{prewarped}+T}\frac{1+z^{-1}}{1+\frac{T-2\mathrm{R}_{prewarped}C_{prewarped}}{T+2\mathrm{R}_{prewarped}C_{prewarped}}z^{-1}}$$

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=b_0\frac{1+b_1z^{-1}}{1+a_0z^{-1}}$$

6. **Coefficienti del filtro IIR e costruzione cella**

Dai due risultati precedentemente ottenuti e qui mostrati si ottengono importanti equivalenze:

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$b_0 = \frac{T}{2\mathrm{R}_{prewarped} C_{prewarped} + T}$$

$$a_0 = \frac{T - 2\mathrm{R}_{prewarped} C_{prewarped}}{T + 2\mathrm{R}_{prewarped} C_{prewarped}}$$

$$b_1 = 1$$

Questi sono i coefficienti del filtro numerico in funzione dei valori dei componenti (prewarped).

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$R_{prewarped} C_{prewarped} = \frac{T/2}{\tan\left(\frac{T}{2 R_{target} C_{target}}\right)}$$

Ricordiamo anche l'espressione sopra riportata per il Pre-Warping.

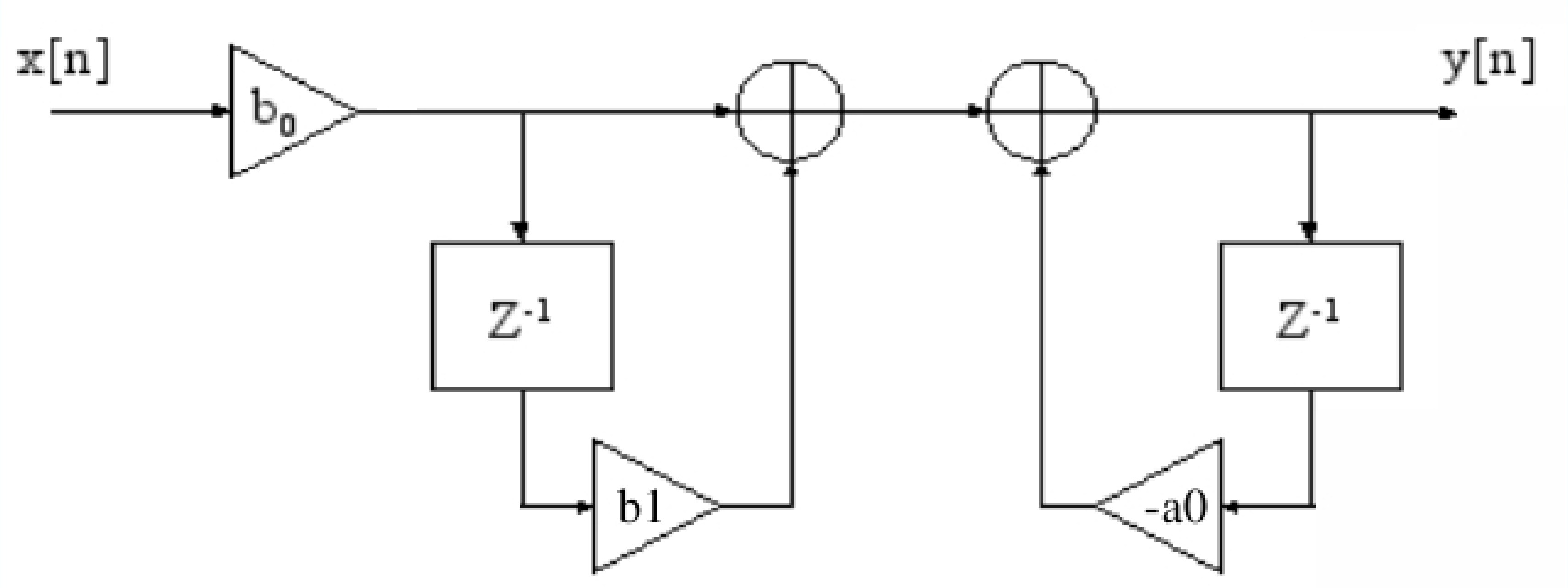
CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$y(n)=b_0(x(n)+b_1 x(n-1))-a_0 y(n-1)$$

Dalla risposta nel tempo ricaviamo la costruzione della cella di filtro:

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

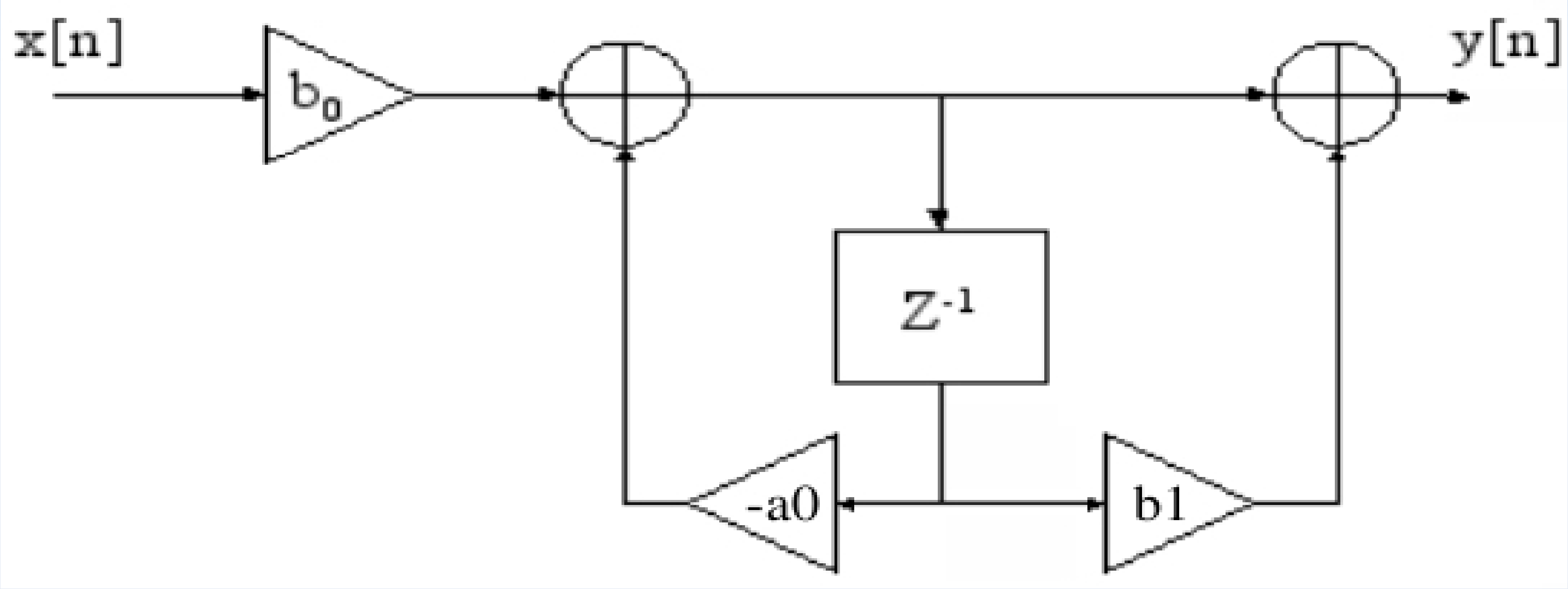
$$y(n)=b_0(x(n)+b_1 x(n-1))-a_0 y(n-1)$$



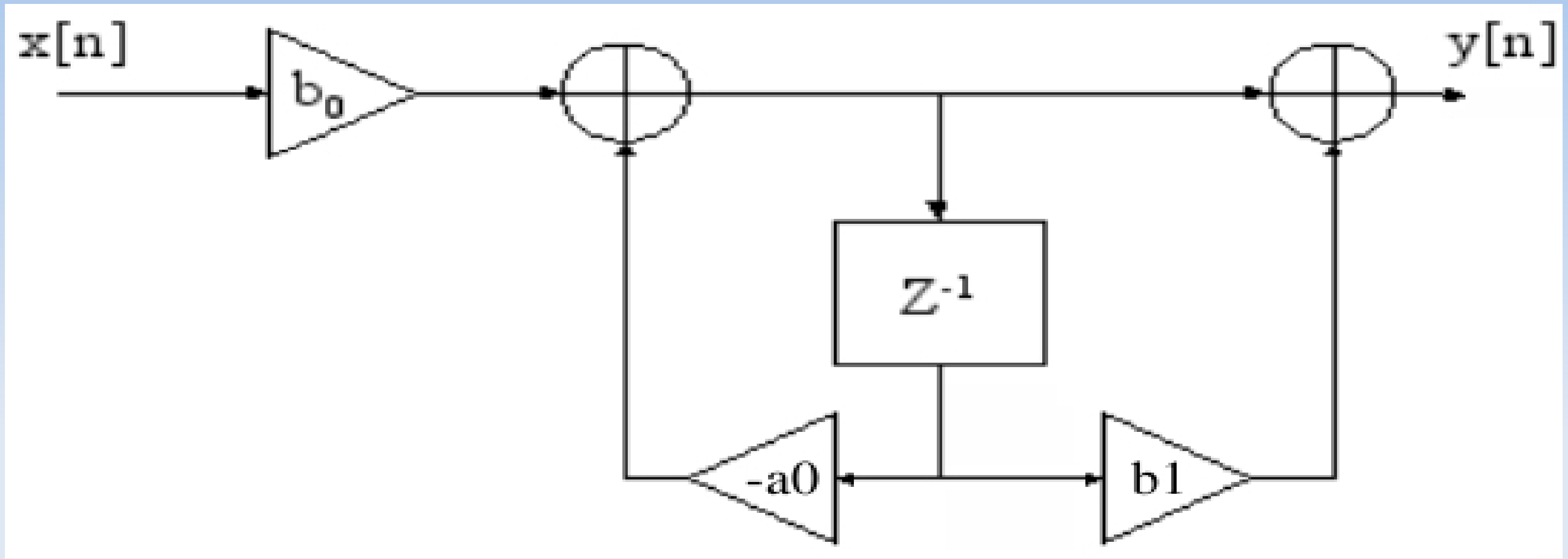
La cella può essere modificata senza perdere efficacia per le proprietà dei sistemi lineari:

CALCOLO FILTRI IIR CON IL METODO DELLA TRASFORMAZIONE BILINEARE

$$y(n) = b_0 (x(n) + b_1 x(n-1)) - a_0 y(n-1)$$



Ecco la cella IIR nella sua forma canonica.



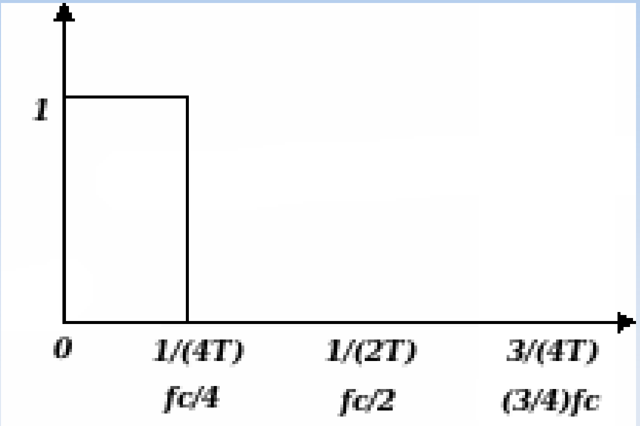
7.**Stabilità**

Supponendo che il sistema analogico di partenza sia stabile, quindi possieda poli s_{pi} con parte reale negativa, i poli del sistema a tempo discreto z_{pi} hanno modulo minore di 1 e il sistema numerico è anch'esso stabile.

Filtri FIR

CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA

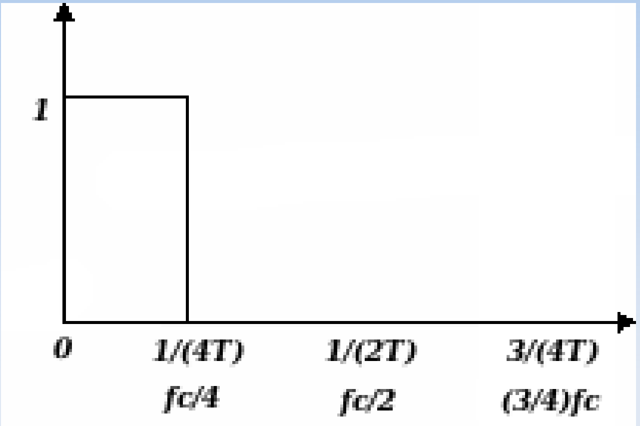
CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA



1.**Costruzione risposta desiderata**

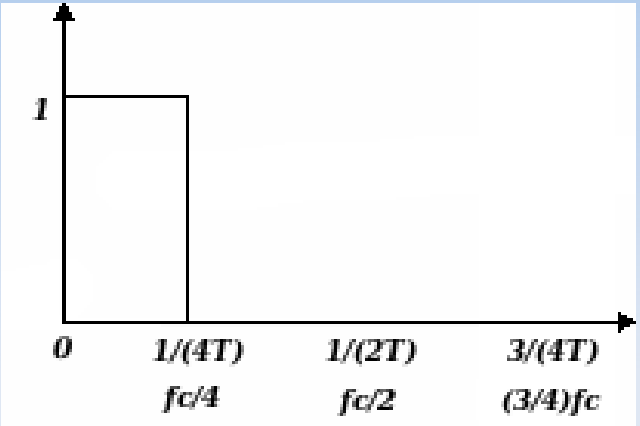
Si voglia approssimare la risposta descritta dalla figura con un filtro FIR.
Si tenga presente che T=1/fc. e quindi fc=1/T.

CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA



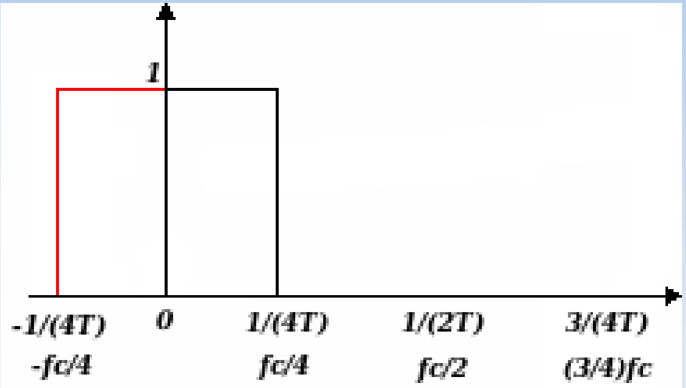
La risposta è quella di un passabasso ideale, non riusciremo ad approssimarla a meno di usare un filtro con un enorme numero di coefficienti.

CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA



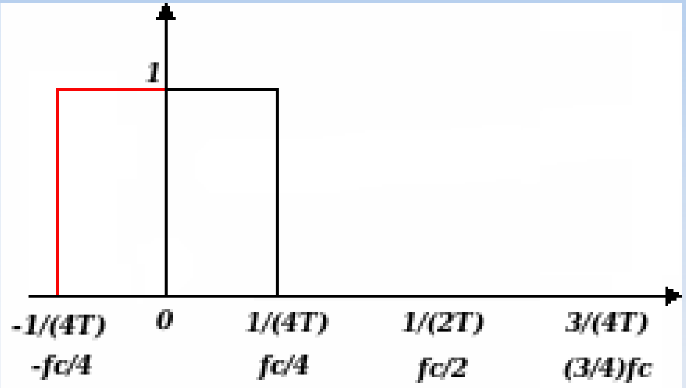
Dal momento che il nostro esempio ne utilizzerà solo alcuni, sarà chiaro che la risposta del filtro simulato coinciderà solo nei punti che selezioneremo con quella del filtro ideale. Negli altri punti ci saranno notevoli discrepanze.

CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA



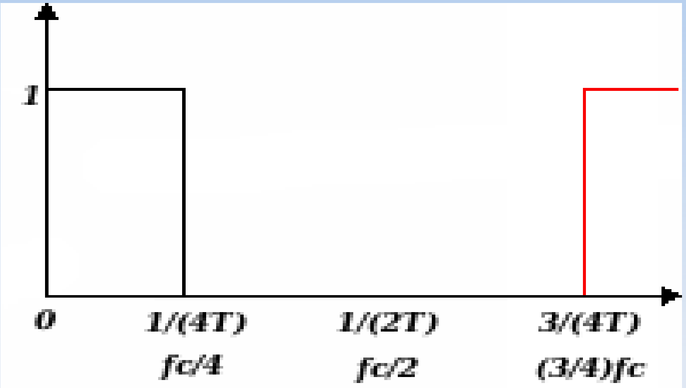
Per ottenere coefficienti del FIR che siano reali (cioè non contengano parte immaginaria) è necessario ipotizzare che la risposta del filtro sia simmetrica rispetto all'asse delle ampiezze (cioè nel semipiano delle frequenze negative).

CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA



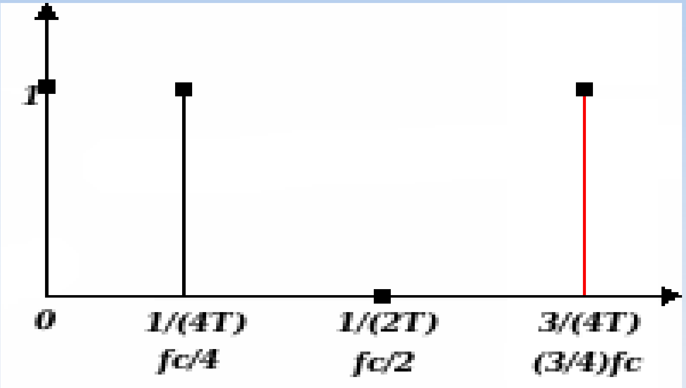
Per costruire il filtro FIR necessitiamo di antitrasformare tramite la Trasformata Discreta di Fourier Inversa (IDFT) i campioni della risposta in frequenza data.

CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA



Riportiamo ora la parte negativa della risposta a completare la periodicità 0->fc (frequenza di campionamento) della risposta simmetrica del nostro passabasso ideale:

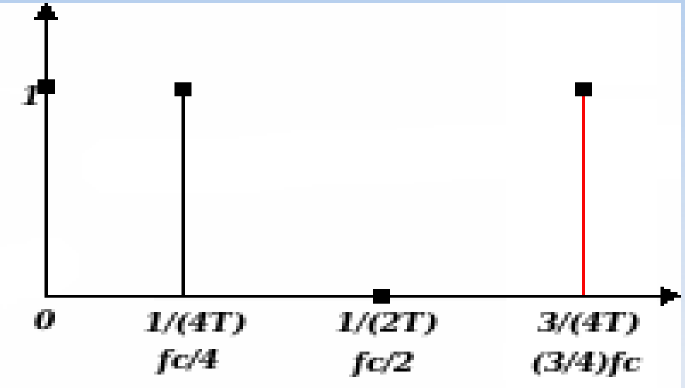
CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA



2.**Campionamento della risposta**

A questo punto campioniamo la risposta a passo uniforme su tutto l'arco delle frequenze.
Si tenga presente che il punto in fc corrisponde al punto in 0)

CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA

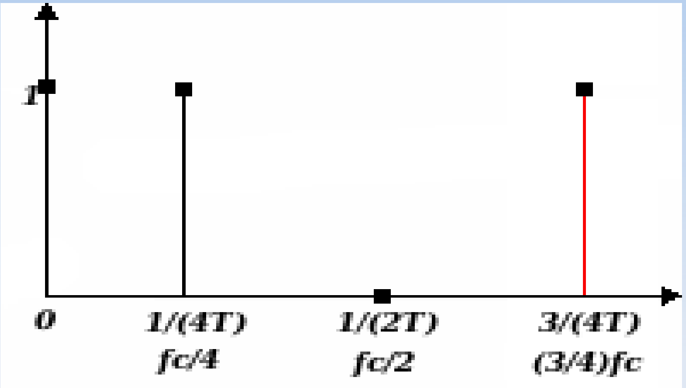


Sia f_k il passo di campionamento:

$$f_k = \frac{k}{NT} \qquad 0 \leqslant k \leqslant N-1$$

N è il numero di campioni che vogliamo ricavare dalla risposta modello.

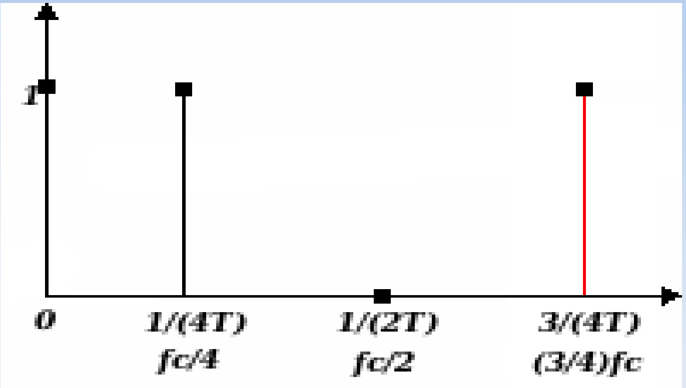
CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA



Si ricorda che:

$$T = \frac{1}{f_c}$$

CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA

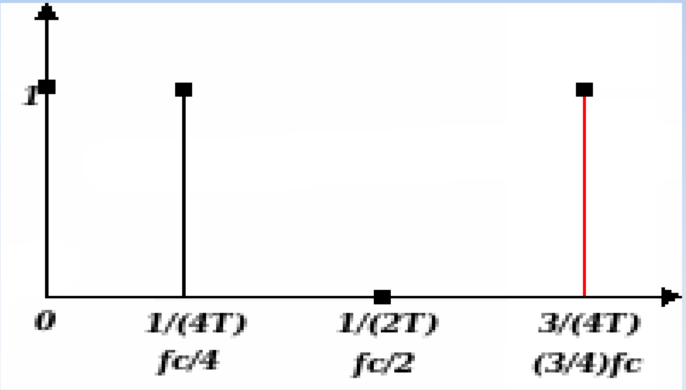


Si fissi N=4:

$$s_H(f) = (1, 1, 0, 1)$$

Questi sono i valori ottenuti per campionamento della risposta desiderata.

CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA



3.**Calcolo coefficienti FIR**

Per ottenere i coefficienti del filtro FIR bisogna eseguire la IDFT sulla risposta campionata.

CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA

$$h(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} s_H(f)\, e^{\frac{i2\Pi kn}{N}}$$

Questa è l'espressione della IDFT (Trasformata Inversa di Fourier Discreta).

CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA

$$h(n)=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} s_H(f)\, e^{\frac{i2\Pi\, kn}{4}}$$

Con N=4 l'espressione si modifica come nella figura.

CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA

$$h(n)=\frac{1}{4}(1*1+1*e^{i2\Pi n/4}+0+1*e^{i6\Pi n/4})$$

Sviluppiamo la sommatoria e otteniamo la nuova espressione di h(n), alla quale applicheremo la formula di Eulero:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x$$

CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA

$$h(n)=\frac{1}{4}(1+\cos(n\Pi/2)+i\sin(n\Pi/2)+\cos(6\Pi n/4)+i\sin(6\Pi n/4))$$

Questa è l' espressione finale di h(n), che ci permetterà di calcolare i valori dei coefficienti del FIR.

CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA

$$h(n)=\frac{1}{4}(1+\cos(n\Pi/2)+i\sin(n\Pi/2)+\cos(6\Pi n/4)+i\sin(6\Pi n/4))$$

Calcoliamo i valori dei coefficienti del filtro per:
n=0 (segnale diretto)
n=1 (segnale ritardato di 1 campione)
n=2 (segnale ritardato di 2 campioni)
n=3 (segnale ritardato di 3 campioni).

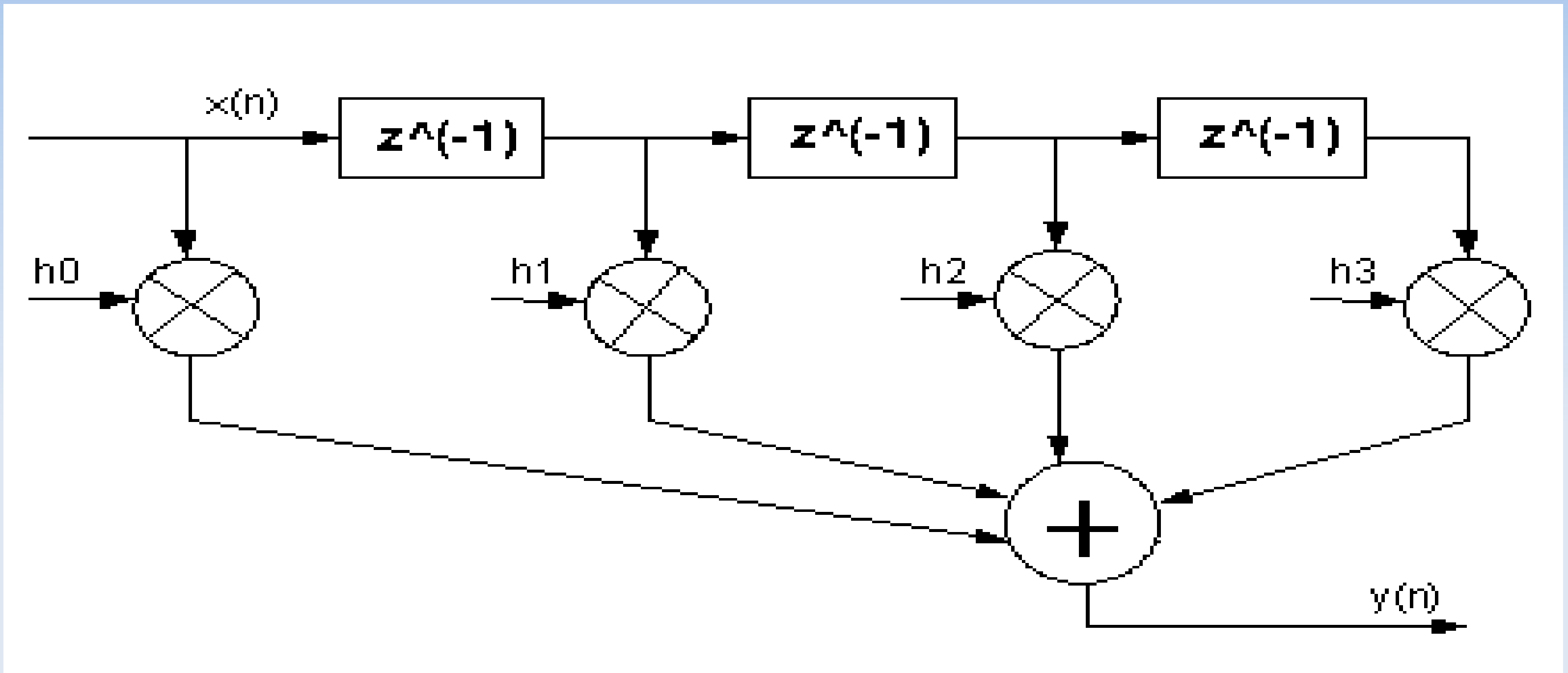
CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA

$$h(n)=\frac{1}{4}\left(1+\cos(n\Pi/2)+i\sin(n\Pi/2)+\cos(6\Pi n/4)+i\sin(6\Pi n/4)\right)$$

Calcoliamo i valori dei coefficienti del filtro:

h(0)=1/4 (1+1+0+1+0)= 3/4
h(1)=1/4 (1+0+i+0-i)= 1/4
h(2)=1/4 (1-1+0-1+0)= -1/4
h(3)=1/4 (1+0-i+0+i)= 1/4

CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA



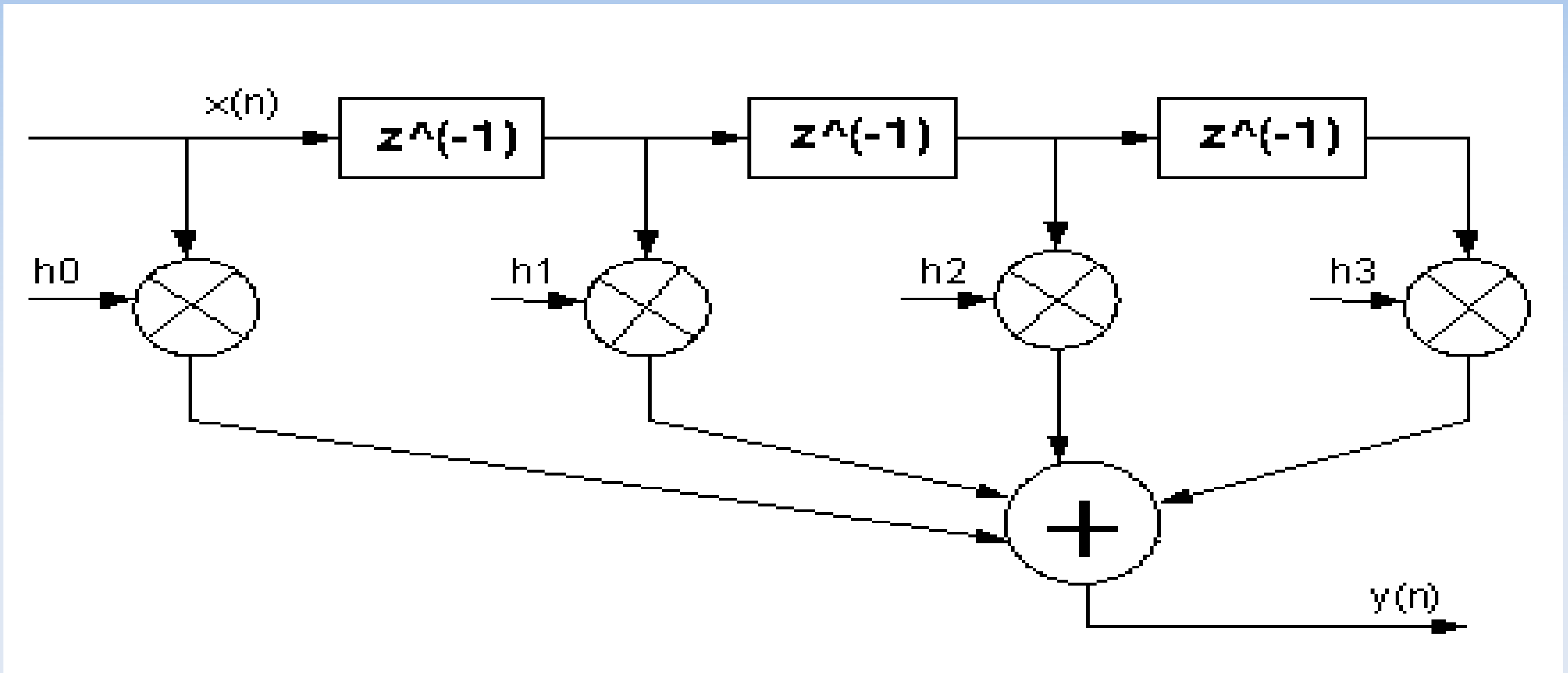
h(0)=1/4 (1+1+0+1+0)= 3/4

h(1)=1/4 (1+0+i+0-i)= 1/4

h(2)=1/4 (1-1+0-1+0)= -1/4

h(3)=1/4 (1+0-i+0+i)= 1/4

CALCOLO FILTRI FIR CON IL METODO DEL CAMPIONAMENTO IN FREQUENZA



4.**Stabilità**

A causa della loro natura non ricorsiva, i filtri FIR sono intrinsecamente stabili.