

Velocità del suono, risonanza e archetteria.

di Simone Bianchi (TangerineTech Engineering) <http://www.tangerinotech.net>

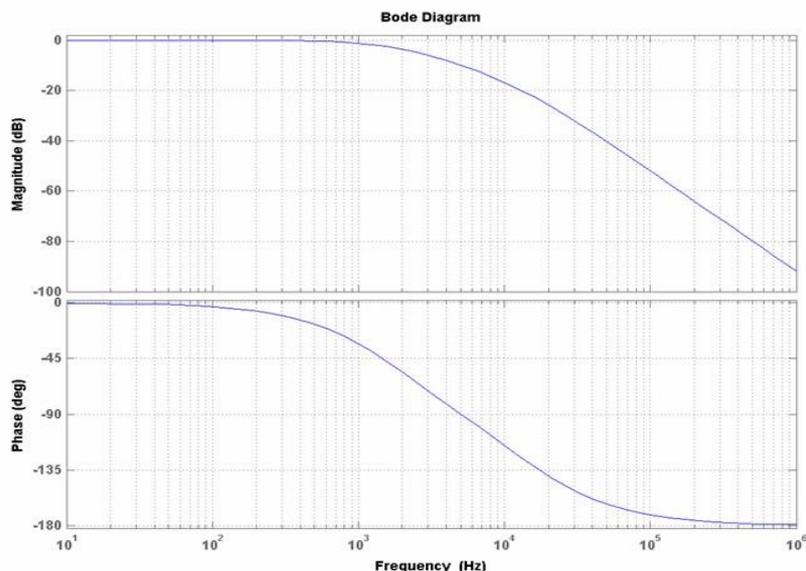
Originariamente comparso sul Blog del M° Paolo Sarri all'indirizzo www.atelierdarcheterie.com/blog/index.html

1. Introduzione

Nell'approccio scientifico (o quantomeno appoggiato da un metodo scientifico) alla costruzione degli strumenti musicali ad arco, alcuni parametri fisici di base debbono essere tenuti in considerazione. Questo non sostituisce naturalmente il classico metodo del liutaio, frutto di secoli di esperienza costruttiva e di ascolto, ma può validamente appoggiarlo al fine di rendere 'replicabili' i risultati dell'arte liutaria.

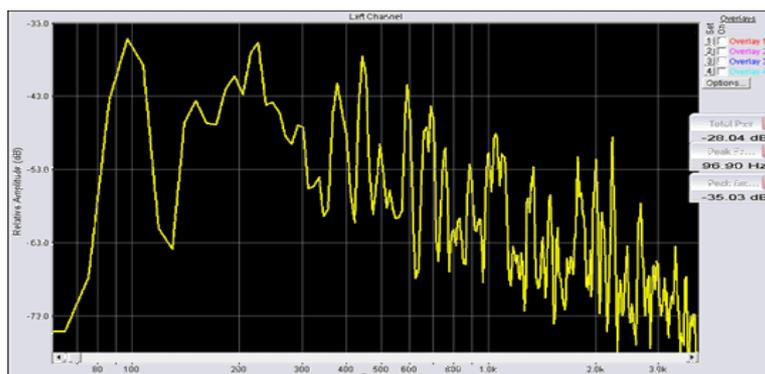
Quali siano i parametri fisici 'interessanti' da caratterizzare in uno strumento musicale non è cosa banale, ma qualche 'educated guessing' può venirci in aiuto. La risposta in frequenza, per esempio (vale a dire quali frequenze lo strumento tenderà ad amplificare o attenuare, quando sollecitato da esse) è sicuramente un parametro udibile, come pure le caratteristiche di decadimento temporale del suono nel lungo periodo, magari dovute a riflessioni delle onde sonore all'interno della struttura dello strumento stesso (cassa, corde, arco).

Soffermiamoci sulla risposta in frequenza, probabilmente il parametro più rilevante nella percezione del suono. Essa è spesso rappresentata come un diagramma sul piano cartesiano:



semplificando fino a essere un po' grossolano, dirò che il primo diagramma rappresenta la risposta del sistema alle frequenze in termini di volume (ampiezza) mentre il secondo la rappresenta in termini di ritardi della risposta stessa (fase).

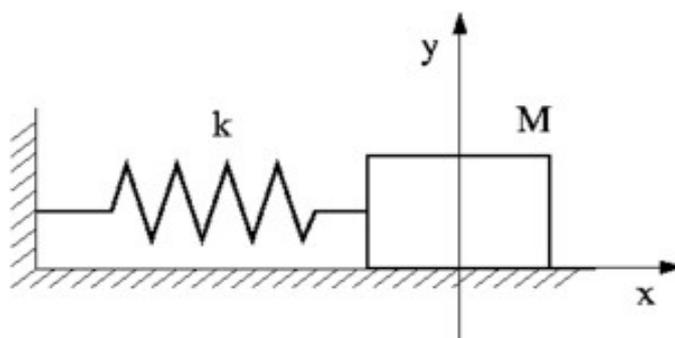
La risposta in frequenza di uno strumento musicale non è mai lineare. Vale a dire che le sollecitazioni impresse dal musicista con l'arco e le dita non verranno amplificate dallo strumento tutte allo stesso modo. Di seguito ecco l'analisi spettrale di un violoncello (mediata su di un intero brano musicale):



Si osserva una risposta tutt'altro che piatta, anche se effettivamente bisogna tenere in considerazione che lo stimolo è costituito dalle sollecitazioni meccaniche impresse dal musicista, piuttosto che da un segnale a spettro controllato (rumore di misura). **Comunque la risposta di uno strumento musicale, in generale, non è piatta. Questo definisce il carattere e il suono degli strumenti stessi. Osservando le risposte in frequenza di strumenti differenti, esse varieranno in accordo al 'temperamento' di ogni strumento. E, nel caso degli strumenti ad arco, del 'temperamento' (inteso come caratteristica sonora percepita) dell'arco impugnato dal musicista.**

2. Modello semplificato del sistema arco / Oscillazioni di compressione

Focalizziamo la nostra analisi alla bacchetta dell'arco, sistema che modelleremo in maniera alquanto 'riduzionista':



La molla (costante elastica k) rappresenta l'elasticità del legno, la massa (M) invece rappresenta l'inerzia dei materiali coinvolti nella costruzione dell'arco.

Secondo le equazioni del moto armonico (trascurando lo smorzamento), la pulsazione di questo sistema, quando sollecitato spostandolo da una posizione di equilibrio è:

$$\omega = \sqrt{k/M}$$

ω = omega (pulsazione dell'oscillazione)

$\sqrt{\quad}$ = radice quadrata

k = costante elastica della molla

M = massa del sistema

vale a dire che la frequenza (che dipende direttamente dalla pulsazione) a cui il sistema risuonerà sarà tanto maggiore quanto maggiore sarà la costante elastica del legno, a parità di massa del sistema, e tanto minore quanto maggiore sarà la massa del sistema, a parità di costante elastica del legno.

Ritourneremo fra breve su questo; intanto valutiamo quale può essere l'influenza della frequenza di risonanza dell'arco sul comportamento dell'intero strumento durante una performance. **L'arco trasmette l'eccitazione**

impressa dal musicista allo strumento, filtrandola secondo le proprie caratteristiche meccaniche. La frequenza di risonanza dell'arco condiziona in maniera pesante la risposta dell'arco alle sollecitazioni dell'esecutore, attenuandone le componenti lontane dalla propria frequenza centrale, definita dall'equazione più sopra.

Esisterà (e questo è lasciato al lavoro del liutaio!) una frequenza ottimale di risonanza del sistema arco che agevola la trasmissione delle sollecitazioni dall'esecutore allo strumento?

E soprattutto, come si fa a correlare la frequenza di risonanza del sistema arco con la scelta del materiale adatto per ottenerla? Sto parlando essenzialmente delle caratteristiche del legno da archetteria.

Il modulo di Young Y è definito come:

$$Y = s/e$$

s = forza applicata / area di applicazione

e = allungamento relativo

Si vede abbastanza bene che il modulo di Young è direttamente collegato alla costante elastica del legno, e quindi in diretta relazione con la frequenza di risonanza del sistema arco. Vale a dire che un valore di Y maggiore porta a un valore di k maggiore e quindi ad una frequenza di risonanza maggiore. Ma Y non tiene in considerazione M , la massa del materiale, ed è quindi un parametro insufficiente a stabilire una completa relazione con la 'risposta in frequenza' del sistema arco.

Espandiamo l'espressione di Y per vedere quali altri parametri possiamo aggiungere per ottenere un parametro più soddisfacente e misurabile, correlato in maniera diretta alla frequenza di risonanza:

(Nota: per semplificare il modello consideriamo la bacchetta di legno dell'arco come un cilindro di superficie A e lunghezza L)

$$Y = (f / A) / (l / L)$$

f = forza applicata

A = area del materiale

l = allungamento

L = lunghezza del materiale

Dato che (in valore assoluto) $f / l = k$ (costante elastica della molla)

$$Y = k (L/A)$$

e quindi $k = (YA)/L$.

Dato che $w = \text{sqr}(k/M)$

si ha che $w = \text{sqr}(YA/LM)$

dove:

Y = modulo di Young

A = superficie del materiale

L = lunghezza del materiale

M = massa del materiale.

Ma la massa del materiale può essere espressa in funzione della sua densità (d), e volume (V).

$$w = \text{sqr}(YA/LM)$$

diventa

$$w = \text{sqr}(YA/LdV)$$

semplificando

$$w = \text{sqr}(Y/d) * \text{sqr}(A/LV)$$

Cioè la pulsazione di risonanza dipende da due fattori: $\text{sqr}(A/LV)$ (dipendente dalle dimensioni fisiche) e $\text{sqr}(Y/d)$. Quest'ultimo fattore è dipendente dalle proprietà intrinseche del materiale. Si tratta della radice quadrata del rapporto fra il modulo di Young del legno e la sua densità. In altre parole, è la velocità del suono nel materiale.

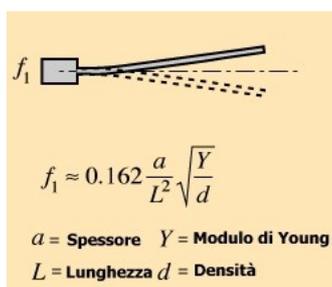
$$v(\text{suono}) = \text{sqr}(Y/d)$$

Dunque:

$$w = v(\text{suono}) * \text{sqr}(A/LV)$$

3. Modello semplificato del sistema arco / Altre oscillazioni

Questo per le oscillazioni 'di compressione' del 'cilindro vibrante'. Per quanto riguarda le oscillazioni 'trasversali' è valida la seguente relazione (ometto la dimostrazione, valida per piccoli spessori, che porta all'espressione della prima armonica):



$$f_1 \approx 0.162 \frac{a}{L^2} \sqrt{\frac{Y}{d}}$$

 $a = \text{Spessore} \quad Y = \text{Modulo di Young}$
 $L = \text{Lunghezza} \quad d = \text{Densità}$

Anche qui si vede un termine $(0.162 a/L^2)$ dipendente dalla geometria del materiale e un altro termine cioè $\text{sqr}(Y/d)$, di nuovo uguale alla velocità del suono nel materiale

$$v(\text{suono}) = \text{sqr}(Y/d).$$

4. Conclusioni

Nell'ipotesi che la frequenza di risonanza di uno strumento musicale (e in particolare dell'arco che lo sollecita) sia determinante ai fini della performance musicale, ipotesi assai ragionevole, **un modo semplice per correlare questo parametro al materiale utilizzato è valutare la velocità del suono nel materiale, azione che riassume in sé le misure di elasticità e densità in modo sintetico ed elegante.** Resta poi al liutaio ottenere la migliore correlazione possibile tra proprietà risonanti del materiale e ottimale performance del **'sistema' esecutore -> arco -> strumento.**

Fonti:

<http://www.scuolaelettrica.it>

<http://www.wikipedia.it>

http://www.mnt-aq.it/rv/vitale_violoncello.htm

<http://www.atelierdarcheterie.com>

<http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/Hbase/music/barres.html>